**Dipl.-Ing. Paul MOHR** **email: p.mohr@eduhi.at**

# Vektorrechnung in räumlichen Kräftesystemen

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  **Mechanik; Statik; allgemeines räumliches Kräftesystem (ARKS); Vektorrechnung**

- Kurzzusammenfassung

  **Bei der Berechnung von Auflagerkräften und Schnittkräften in Bauteilen wie z.B. Getriebewellen liegt meistens ein allgemeines räumliches Kräftesystem vor.**

  **Die Lösung der Aufgaben mittels Vektorrechnung ist der traditionellen Rückführung auf ebene Kräftesysteme an Eleganz und Mächtigkeit weit überlegen.**

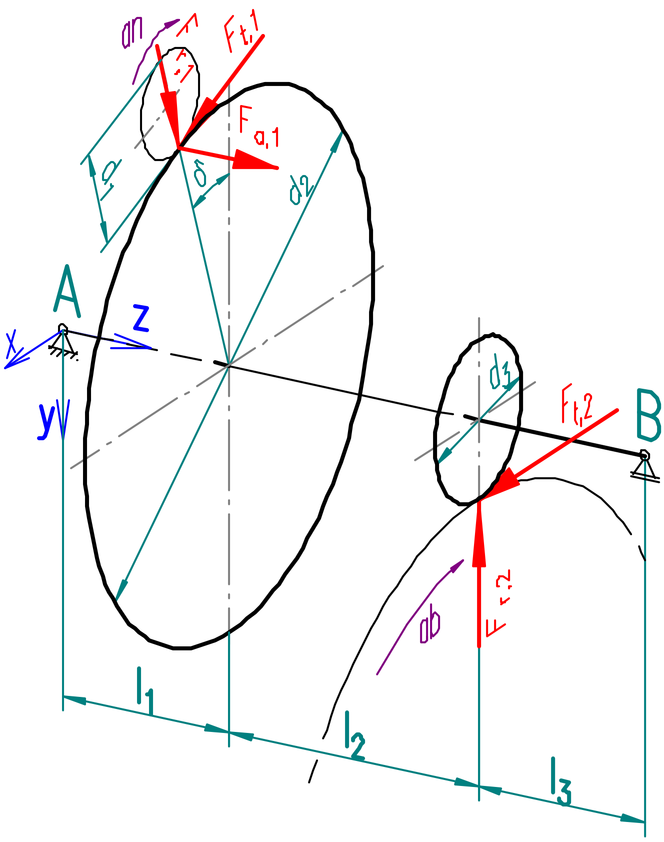
- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  **Mechanik / räumliche Kräftesysteme im 1. oder 2. Jg. der HTL; Vektorrechnung**

- Mathcad-Version:

  **Mathcad 11**

## Berechnung der Auflagerkräfte einer Getriebe-Zwischenwelle mittels Vektorrechnung




$° := \text{Grad}$

### *Angaben*

$P_{an} := 8\text{kW}$ $\qquad n_{an} := 960\text{min}^{-1}$

$d_1 := 48\text{mm}$ $\qquad \delta := 20\text{Grad}$

$d_2 := 240\text{mm}$ $\qquad d_3 := 72\text{mm}$

Normeingriffs-winkel $\qquad \alpha := 20°$

Schrägungs-winkel $\qquad \beta_{12} := 15°$

Es ist nur das erste Zahnradpaar schrägverzahnt.

$l_1 := 80\text{mm}$ $\qquad l_2 := 120\text{mm}$

$l_3 := 80\text{mm}$

Lagerabstand $\qquad L := l_1 + l_2 + l_3$

## Berechnung der Zahnkräfte

Zunächst müssen die Zahnkräfte nach der Formeln für die Berechnung von Maschinenelementen berechnet werden.

**Antriebsmoment** $M_{an} := \frac{P_{an}}{2\pi \cdot n_{an}}$

**Zahnkräfte**

Tangentialkräfte $F_{t1} := \frac{2M_{an}}{d_1}$ $\qquad F_{t2} := \frac{F_{t1} \cdot d_2}{d_3}$

Radialkräfte $F_{r1} := F_{t1} \cdot \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\beta_{12})}$ $\qquad F_{r2} := F_{t2} \cdot \tan(\alpha)$

Axialkräfte $F_{a1} := F_{t1} \cdot \tan(\beta_{12})$ $\qquad F_{a2} := 0N$

## Berechnung der Auflagerkraft $F_B$ aus dem Momentengleichgewicht um A

Wie in allgemeinen ebenen Kräftesystemen enthält die Momentengleichung um das Festlager als einzige Unbekannte die Auflagerkraft im Loslager.

**Zahnkräfte in Vektorform und deren "Hebel" zum Punkt A**

Für die Berechnung der Momente um A müssen die Zahnkräfte als Vektoren im gewählten Koordinatensystem (siehe Abb.) dargestellt werden.
Außerdem werden die Vektoren von den Kraftangriffspunkten zum Drehpunkt A benötigt.

*K r ä f t e* *H e b e l*

$$\mathbf{F_1} := \begin{pmatrix} F_{t1} \cdot \cos(\delta) - F_{r1} \cdot \sin(\delta) \\ F_{t1} \cdot \sin(\delta) + F_{r1} \cdot \cos(\delta) \\ F_{a1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{h_{1A}} := \begin{pmatrix} -\frac{d_2}{2} \cdot \sin(\delta) \\ \frac{d_2}{2} \cdot \cos(\delta) \\ -l_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F_2} := \begin{pmatrix} F_{t2} \\ -F_{r2} \\ F_{a2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{h_{2A}} := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d_3}{2} \\ -(l_1 + l_2) \end{bmatrix}$$

### Moment der Zahnkräfte um A

Das Moment einer Kraft um einen Punkt ergibt sich aus dem Vektorprodukt aus Kraft x Hebel.

$$\mathbf{M_{ZA}} := \mathbf{F_1} \times \mathbf{h_{1A}} + \mathbf{F_2} \times \mathbf{h_{2A}} \qquad \mathbf{M_{ZA}} = \begin{pmatrix} 519.72 \\ 2389.1 \\ 0 \end{pmatrix} N \cdot m$$

Dieses Moment muss durch die Auflagerkraft FB ausgeglichen werden. Daraus ergibt sich folgende Vektorgleichung (daraus werden die beiden weiter unten stehenden Koordinatengleichungen):

$$\begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} + \mathbf{M_{ZA}} = 0 \qquad L := L \qquad \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -F_{By} \cdot L \\ F_{Bx} \cdot L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Nebenrechnung zeigt das Ergebnis des Vektorprodukts. (L wurde kurzfristig rückdefinirt, damit man allgemein rechnen kann)

$$F_{By} \cdot -L = -\mathbf{M_{ZA}}_0 \qquad F_{By} := \frac{\mathbf{M_{ZA}}_0}{L}$$

bzw.

$$-F_{Bx} \cdot -L = -\mathbf{M_{ZA}}_1 \qquad F_{Bx} := \frac{-\mathbf{M_{ZA}}_1}{L}$$

Auflagerkraft $F_B$ in Vektorform

$$\mathbf{F_B} := \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\mathbf{F_B} = \begin{pmatrix} -8532.49 \\ 1856.14 \\ 0 \end{pmatrix} N}$$

Die x- und y-Komponente von $F_B$ ergeben geometrisch addiert die Radialkraft im Loslager B. Die z-Komponente entspricht der Axialbelastung im Lager. Nachdem diese Überlegungen auch für Momente gelten, werden nachfolgend zwei Funktionen zur Extraktion der xy-Komponente und der z-Komponente eines Vektors definiert.
Merke: Die Funktionen setzen voraus. dass die z-Achse immer in die axiale Richtung zeigt.

Radialkraft $K_{xy}(\mathbf{v}) := \sqrt{(\mathbf{v}_0)^2 + (\mathbf{v}_1)^2} \qquad F_{Br} := K_{xy}(\mathbf{F_B}) \qquad F_{Br} = 8732.05\,N$

Axialkraft $K_z(\mathbf{v}) := |\mathbf{v}_2| \qquad F_{Ba} := K_z(\mathbf{F_B}) \qquad F_{Ba} = 0\,N$ (Loslager)

## *Berechnung der Auflagerkraft $F_A$ aus der Kräftesumme*

Wie in allgemeinen ebenen Kräftesystemen muss die Summe aller Kräfte Null sein. Es gilt also:

$$\mathbf{F_A} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_B} = 0$$

bzw.

$$\mathbf{F_A} := -(\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_B}) \qquad \boxed{\mathbf{F_A} = \begin{pmatrix} -5208.38 \\ -141.48 \\ -888.45 \end{pmatrix} N}$$

Radialkraft $F_{Ar} := K_{xy}(\mathbf{F_A}) \qquad F_{Ar} = 5210.3\,N$

Axialkraft $F_{Aa} := K_z(\mathbf{F_A}) \qquad F_{Aa} = 888.45\,N$

## *Schnittkräfte in der Welle*

Analog zur Berechnung der Auflagerkräfte werden auch die Schnittkräfte in der Welle berechnet. Dafür müssen lediglich die Hebel der Kräfte gegenüber dem Schnittpunkt neu definiert werden.

Für den kritischen Abschnitt $\mathbf{l_1 < z < (l_1 + l_2)}$ gilt:

gewählter Schnittpunktes $z := \frac{L}{2}$ (Wellenmitte)

Hebel von $F_A$ zum Schnittpt. $\mathbf{h_{AS}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

Hebel von $F_1$ zum Schnittpt. $\mathbf{h_{1S}} := \begin{pmatrix} -\frac{d_2}{2} \cdot \sin(\delta) \\ \frac{d_2}{2} \cdot \cos(\delta) \\ z - l_1 \end{pmatrix}$

**Schnittmoment** $\mathbf{M_S} := -(\mathbf{F_A} \times \mathbf{h_{AS}} + \mathbf{F_1} \times \mathbf{h_{1S}})$ $\boxed{\mathbf{M_S} = \begin{pmatrix} -18.49 \\ -531.4 \\ -397.89 \end{pmatrix} \mathrm{N \cdot m}}$

Biegemoment $M_b := K_{xy}(\mathbf{M_S})$ $M_b = 531.72\,\mathrm{N \cdot m}$

Torsionsmoment $M_t := K_z(\mathbf{M_S})$ $M_t = 397.89\,\mathrm{N \cdot m}$

**Schnittkräfte** $\mathbf{F_S} := -(\mathbf{F_A} + \mathbf{F_1})$ $\boxed{\mathbf{F_S} = \begin{pmatrix} 2519.94 \\ -2166.61 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}}$

Querkraft $F_Q := K_{xy}(\mathbf{F_S})$ $\boxed{F_Q = 3323.3\,\mathrm{N}}$

Normalkraft $F_N := K_z(\mathbf{F_S})$ $\boxed{F_N = 0\,\mathrm{N}}$ (Die Axialkräfte von $F_A$ und $F_1$ heben sich auf.)